TEMA NR. 8

pagina 1

ALGEBRĂ VECTORIALĂ

(1) Fie triunghiul ABC. Notăm cu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectorii $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ și respectiv $\vec{AB}$.

Să se exprime cu ajutorul lor vectorii ce coincid cu medianele triunghiului și să se arate că aceștia pot forma un triunghi.

Indicație Dacă $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$ și $\vec{CC'}$ sunt cele trei mediane ale triunghiului, atunci avem $\vec{AA'} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$ ...

Se ține cont de rezultatul: trei vectori oarecare închid un triunghi dacă și numai dacă suma lor este vectorul nul.

(2) Fie triunghiul ABC, G centrul său de greutate și M un punct oarecare. Să se demonstreze că:

a) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$;

b) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

(3) Se consideră vectorii:

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{b} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$;

$\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{k}$.

Să se determine $\vec{v_1} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ și $\vec{v_2} = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{d}$.

Răspuns. $\vec{v_1} = -7\vec{i} + 8\vec{j}$; $\vec{v_2} = -8\vec{i} + 12\vec{j} - 11\vec{k}$.

(4) Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trei vectori necoplanari. Să se cerceteze dacă vectorii:

1) $\vec{u}' = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$; $\vec{v}' = -\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$; $\vec{w}' = -\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$;

2) $\vec{u}' = \vec{w}$; $\vec{v}' = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$; $\vec{w}' = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$;

3) $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{w}$; $\vec{w}' = -\vec{u} + \vec{w}$;

TEMA NR. 8

4) $\vec{u}' = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$; $\vec{v}' = 2\vec{u} + 3\vec{v} + 4\vec{w}$; $\vec{w}' = 3\vec{u} + 4\vec{v} + 5\vec{w}$ sunt coplanari și în caz afirmativ să se găsească relația dintre ei.

Indicație. Se ține cont că trei vectori necoplanari formează o bază în spațiul liniar real tridimensional al vectorilor geometrici V_3. Se scrie matricea de trecere C de la baza $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ la fiecare sistem de vectori. Se calculează rang C. Dacă rang $C \leq 2$ vectorii sunt coplanari (liniar dependenți), iar dacă rang $C = 3$ vectorii sunt necoplanari sau liniar independenți.

Răspuns 1) $r = 2$, coplanari ; 2) $r = 2$, coplanari ; 3) $r = 3$, necoplanari ; 4) $r = 2$, coplanari. În caz că sunt coplanari relația dintre ei este: 1) $\vec{w}' = -\vec{u}' - \vec{v}'$; 2) $\vec{w}' = 2\vec{u}' + \vec{v}'$; 4) $\vec{u}' = 2\vec{v}' - \vec{w}'$.

(5) Se dau vectorii geometrici $\vec{u} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \lambda\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{w} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii să fie coplanari și în acest caz să se descompună vectorul $\vec{u}$ după vectorii $\vec{v}$ și $\vec{w}$.

(6) Fie vectorii geometrici $\vec{a} = (\lambda - 1)\vec{i} + \vec{j} - \lambda\vec{k}$ și $\vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} - \vec{k}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ să fie ortogonali.

Răspuns. Din $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

(7) Fie vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ și $\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{k}$.
Să se calculeze:

a) produsul lor vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$;

b) să se verifice că vectorul obținut este perpendicular pe $\vec{v}_1$, dar și pe $\vec{v}_2$;

c) aria paralelogramului construit pe $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$;

d) unghiul dintre cei doi vectori.

Răspuns. a) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{i} - \vec{k}$;

b) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 = 0, \ldots$

c) $\mathcal{A}$ = aria paralelogramului =

$= \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \sqrt{2}$

d) $\cos\varphi = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, unde $\varphi = \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(8) Se dau punctele $A(2, 3, -1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(3, 1, 1)$. Să se determine:

a) vectorii de poziție ai celor trei puncte: $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ și $\vec{OC}$;

b) aria triunghiului ABC;

c) mijlocul segmentului AB și centrul de greutate G al triunghiului.

Răspuns. a) $\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \ldots$

b) $\mathcal{A} = 3$;

c) dacă D este mijlocul lui AB, atunci $D(2, 2, 1)$;

d) $G(7/3, 5/3, 1)$.

TEMA NR. 8

pagina 4

(9) Se dau punctele $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ şi $D(-5,-4,8)$. Să se determine:

1) volumul tetraedrului $ABCD$ şi lungimea înălţimii coborâtă din D pe planul ABC;

2) unghiul dintre muchiile tetraedrului.

Răspuns. 1) $Vol = \frac{1}{6}\left|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})\right| =$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot 308 = \frac{154}{3}\ ;\ h_D = 11.$$

$$2)\ \cos(\widehat{AB, AC}) = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|} = -\frac{10}{\sqrt{13\cdot 17}} \ldots$$

(10) Se dau vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ şi $\vec{v}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Să se calculeze produsele vectoriale $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ şi $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3$ şi să se compare rezultatele.

(11) Să se rezolve ecuaţia vectorială $\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}$ ştiind că $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ şi $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Răspuns. dacă $\vec{v} = (x, y, z)$, atunci rezultă $x = \frac{5}{2} - \frac{\alpha}{2}$; $y = \frac{3-\alpha}{2}$; $z = \alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

(12) Să se rezolve sistemul de ecuaţii vectoriale

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{v} = 1 \\ \vec{b} \times \vec{v} = \vec{c} \end{cases}$$

ştiind că: $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ şi $\vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

Răspuns. $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.